

Giovanni Morosoli

Rappresentazione delle grandezze sinusoidali
applicate alla corrente alternata

e

Fondamenti sulla trattazione delle correnti elettriche
variabili sinusoidalmente nel tempo



INDICE

Cap. 1) Introduzione: le grandezze periodiche

1.1) Segnale aperiodico.....	4
1.2) Segnale periodico.....	
1.3) Onda impulsiva.....	7
1.4) Onda triangolare.....	9
1.5) Onda a denti di sega.....	9
1.6) Onda sinusoidale.....	10
1.7) Valori importanti caratteristici delle grandezze periodiche.....	12

Cap. 2) Rappresentazione trigonometrica delle grandezze sinusoidali

2.1) Operazioni con le grandezze trigonometriche.....	19
---	----

Cap. 3) Rappresentazione vettoriale delle grandezze sinusoidali

3.1) Operazioni con le grandezze vettoriali.....	22
--	----

Cap. 4) Rappresentazione simbolica delle grandezze sinusoidali

4.1) Numeri immaginari I.....	28
4.2) Numeri complessi C.....	29
4.3) Operatori vettoriali.....	39

Cap. 5) Circuiti in regime sinusoidale

5.1) Tensioni e correnti sinusoidali.....	42
5.2) Resistenza, induttanza e capacità percorse da correnti sinusoidali.....	43
5.3) Legge di Ohm per i circuiti in regime sinusoidale.....	50
5.4) Impedenza.....54	
5.5) Ammettenza.....	60
5.6) Principi di Kirchhoff.....	64
5.7) Potenza.....	64
5.8) Trasformazione stella-triangolo e triangolo-stella.....	68

Cap. 6) Conclusione e riflessioni: perché si utilizza la corrente alternata?

6.1) Il trasformatore.....	74
6.2) Il trasporto dell'energia elettrica.....	77

Bibliografia

Bibliografia(secondo l'ordine alfabetico).....	80
Bibliografia (in ordine d'importanza per il lavoro e dettagliata per argomenti e immagini).....	81

PREFAZIONE

Ai lettori,

Prima di intraprendere uno studio approfondito sulle varie rappresentazioni delle grandezze sinusoidali e sui fondamenti relativi alla trattazione delle correnti elettriche variabili sinusoidalmente nel tempo è lecito chiedersi quale importanza può avere dedicarsi all'apprendimento di tale argomento. Per rispondere a questa domanda ritengo che sia indispensabile collocare il concetto di corrente alternata nel suo contesto storico e culturale, in modo da comprendere appieno l'indispensabile ruolo che essa ricopre nell'odierno mondo industrializzato.

Innanzitutto occorre ricordare che l'idea di impiegare l'energia elettrica su larga scala trova sbocco nella seconda rivoluzione industriale. Negli ultimi decenni del XIX secolo vi era però uno scontro animato tra coloro che si battevano per l'utilizzo della corrente continua e chi invece voleva impiegare quella alternata per il trasporto di questa forma di energia. Da questa divergenza di posizioni uscì comunque nettamente vincente la corrente alternata, dal momento che essa si presentò oggettivamente come la più adatta: infatti, mediante il suo impiego, era possibile trasportare l'energia elettrica a grandi distanze con un alto potenziale, e in seguito, in prossimità delle industrie e delle abitazioni, ridurlo notevolmente (utilizzando dei trasformatori) per evidenti motivi di sicurezza. In tal modo si era quindi in grado di limitare enormemente le perdite di energia sotto forma di calore di Joule dissipato lungo le linee elettriche; tutto ciò non sarebbe invece stato possibile se si fosse impiegata la corrente continua (per una spiegazione fisica si veda in particolare il sesto capitolo). Preso atto di questo aspetto fondamentale, già negli anni '90 dell'Ottocento si iniziò pertanto a fornire la corrente alternata generata dalle cascate del Niagara alle abitazioni e alle industrie americane. Su queste ultime in particolare, l'impatto fu veramente rivoluzionario, poiché non dovevano più necessariamente sorgere nelle immediate vicinanze delle fonti energetiche, quindi l'industrializzazione fu incentivata anche in quelle regioni dove non erano presenti giacimenti di carbone. In ogni caso, la possibilità di trasportare l'energia elettrica su lunghe distanze con sprechi ridotti ebbe un'importanza incalcolabile anche nella vita quotidiana: in particolare, grazie all'invenzione della lampadina a filamento incandescente da parte dello statunitense Thomas Alva Edison nel 1897, si portò uno dei molti benefici dell'elettricità in tutte le case del mondo industrializzato, la luce elettrica. In seguito, dalla seconda rivoluzione industriale in avanti, l'impiego della corrente alternata si è gradatamente affermato in tutte le regioni più avanzate, fino a determinare la costituzione di una rete elettrica che oggi copre ormai gran parte del pianeta.

L'interesse per l'argomento che mi sono impegnato ad approfondire è sicuramente scaturito dalla possibilità di applicare e approfondire alcune delle conoscenze viste negli anni trascorsi al liceo, come i concetti di onda e oscillazione (cap. 1), a un tema specifico e soprattutto concreto. La corrente alternata costituisce infatti un esempio applicativo di quei concetti che altrimenti potrebbero essere considerati a sé stanti, slegati dalla realtà della nostra vita quotidiana. Per poter studiare questo soggetto si sono indubbiamente dovute affrontare tematiche che denotano una certa astrazione (come i numeri immaginari e i numeri complessi) ma il tema di fondo risulta indubbiamente legato alla nostra vita di tutti i giorni: pensiamo infatti a quante volte nel corso di una giornata facciamo uso di apparecchi che per funzionare necessitano dell'energia elettrica, come i computer, la televisione, la radio ecc. Se ora teniamo conto del fatto che il trasporto di quell'energia elettrica che quotidianamente utilizziamo avviene proprio per mezzo della corrente alternata (cap. 6), comprendiamo come essa abbia potuto enormemente influenzare il nostro stile di vita.

L'obiettivo che mi sono prefisso in questo lavoro è fondamentalmente quello di studiare le varie rappresentazioni delle grandezze sinusoidali (tema che necessita la trattazione di vari aspetti matematici) in funzione della loro applicazione alle tensioni e correnti alternate (tema classico di quella parte della fisica che tratta l'elettricità e il magnetismo).

Ecco quindi che in quest'ottica argomenti quali la rappresentazione trigonometrica, quella vettoriale e in misura ancora maggiore quella simbolica, non hanno la pretesa di poter essere considerate assolutamente complete, se vengono analizzate come concetti a sé stanti: per esempio, nella trattazione dei numeri complessi, sono stati messi in evidenza soprattutto quegli aspetti funzionali che hanno un'applicazione nei circuiti in regime sinusoidale; e ciò vale anche per le altre tematiche trattate. Anche se spesso queste ultime sono accompagnate da approfondimenti matematici, sono da ritenere integralmente collegate alla loro applicazione fisica nel campo delle correnti alternate, e quindi ad esse subordinate.

Per quanto riguarda il criterio mediante il quale è stata effettuata la strutturazione del lavoro, si può affermare che l'introduzione (cap. 1) ha lo scopo di richiamare alcuni concetti relativi alle grandezze periodiche utili al tema centrale del lavoro, che sono già stati trattati parzialmente nel programma di fisica e applicazioni della matematica di terza liceo. Ai lettori si chiede dunque solamente di avere in chiaro gli aspetti presentati in questa fase introduttiva del lavoro, ai quali è opportuno aggiungere i concetti di derivata e integrale, perlomeno per quanto riguarda la loro definizione matematica, la loro interpretazione grafica e le loro principali proprietà di calcolo. Nei capitoli successivi (2, 3 e 4) vi si farà infatti spesso riferimento, utilizzandoli come concetti acquisiti per spiegare le varie rappresentazioni delle grandezze sinusoidali. Alla fine del quarto capitolo il lettore avrà raggiunto una certa dimestichezza con il concetto di grandezza sinusoidale e con le sue relative rappresentazioni, ma probabilmente gli sembreranno argomenti piuttosto astratti, che con la concretezza con la quale siamo confrontati quotidianamente hanno poco a che vedere. Ecco allora che a questo punto verranno introdotte le tensioni e le correnti sinusoidali, che indubbiamente danno una grossa connotazione applicativa e concreta ai concetti trattati nei capitoli precedenti, proprio perché se ne vede la loro utilità fisica. L'apice della concretezza degli aspetti legati alla corrente alternata si raggiungerà poi nella conclusione del lavoro (cap. 6), dove si cercherà di richiamare quegli aspetti che hanno un'applicazione pratica molto radicata nella realtà: si farà infatti riferimento all'importanza della corrente alternata nel trasporto dell'energia elettrica, e quindi, in un'ottica più ampia, nella nostra vita quotidiana.

Buona lettura!

Giovanni Morosoli

1) Introduzione: le grandezze periodiche

Nello studio della corrente continua le grandezze fisiche in gioco (come la tensione e l'intensità di corrente elettrica) sono costanti nel tempo, e quindi vengono dette "segnali continui".

Nella pratica si incontrano però frequentemente segnali variabili nel tempo, i quali possono essere distinti in segnali aperiodici e periodici.

Per esempio, l'ordinaria corrente alternata utilizzata nella vita quotidiana è costituita da un segnale che varia periodicamente nel tempo, quindi – dopo aver descritto le principali forme d'onda aperiodiche – verranno analizzate quelle grandezze che variano in modo periodico nel tempo e in particolare la categoria più semplice appartenente a queste ultime: le grandezze sinusoidali; nella stragrande maggioranza dei casi infatti, la corrente alternata è costituita da un segnale che cambia sinusoidalmente nel tempo; quando si parlerà di intensità di corrente alternata, quindi, si intenderà proprio un flusso di elettroni la cui densità varia sinusoidalmente nel tempo.

1.1) Segnale aperiodico

Un segnale viene detto non periodico o aperiodico se risulta privo di un andamento temporale fisso (fig. 1.1) oppure anche se presenta un andamento che si ripete ma su intervalli di tempo irregolari (fig. 1.2).

$$\frac{1}{\omega \cdot C}$$

Fig. 1.1) Come si può facilmente osservare l'andamento di una simile grandezza varia nel tempo senza alcuna regolarità.

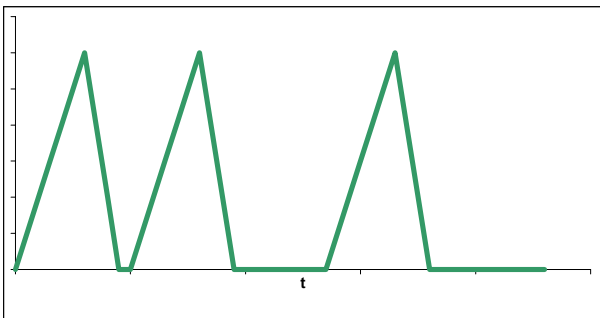


Fig 1.2) La grandezza di questo esempio ripete un andamento fisso ma l'intervallo di tempo che intercorre tra una ripetizione e l'altra non è regolare, pertanto anche in questo caso ci troviamo di fronte a una grandezza aperiodica.

1.2) Segnale periodico

Le grandezze periodiche sono delle funzioni variabili nel tempo che ad intervalli di tempo regolari e uguali si ripetono con le stesse modalità. In particolare, quindi, se esiste un valore finito di tempo T , detto "periodo", tale per cui la grandezza $y(t)$ soddisfa la seguente condizione

$$y(t) = y(t+T) = y(t+2 \cdot T) = y(t+3 \cdot T) = y(t+n \cdot T) = \dots, \text{ dove } t \text{ è un istante di tempo qualsiasi e } n \in \mathbf{N}$$

essa è detta periodica di periodo T , poiché assume valori uguali dopo ogni intervallo di tempo T , a partire da un istante t qualsiasi.

In T secondi abbiamo quindi la descrizione completa di un ciclo; di conseguenza, 1 secondo conterrà un certo numero (non necessariamente intero!) di periodi, che viene definito come la “frequenza” della grandezza periodica analizzata. La frequenza f è allora l’inverso del periodo, cioè $f = 1 / T$.

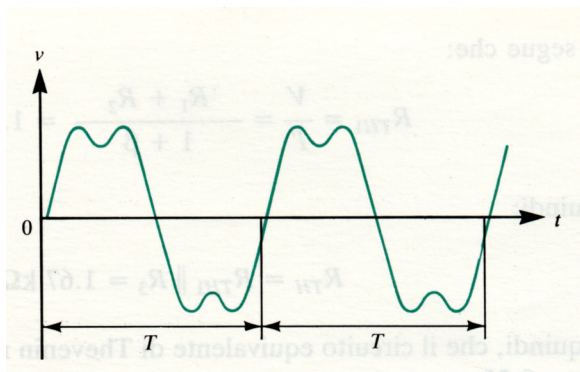


Fig. 1.3) Esempio di segnale periodico.

Si noti che l'andamento temporale della grandezza in esame si ripete sia con le stesse modalità sia ad intervalli di tempo regolari, pertanto essa può essere definita periodica

La definizione di segnale periodico è quindi estremamente generica e lascia aperte innumerevoli varianti per quanto riguarda l'andamento di una qualsiasi grandezza.

Vediamo ora le principali forme d'onda periodiche, che sono l'onda impulsiva, l'onda triangolare e l'onda a dente di sega; l'onda sinusoidale, che è alla base della corrente alternata, sarà invece trattata in seguito.

Cominciamo dall'osservazione di alcune forme d'onda che descrivono l'andamento della tensione in funzione del tempo. Esse sono state prodotte da un apposito generatore di forme d'onde; in un secondo momento, grazie a una stazione di raccolta dati, è stato possibile visualizzare i risultati ottenuti su un computer compiendo delle misurazioni con una frequenza di 10 Hz (in 1s il computer effettua cioè 10 misurazioni), tranne il grafico di fig.C), che è stato ottenuto con una frequenza di 500 Hz. Abbiamo così ottenuto sperimentalmente le seguenti forme d'onda:

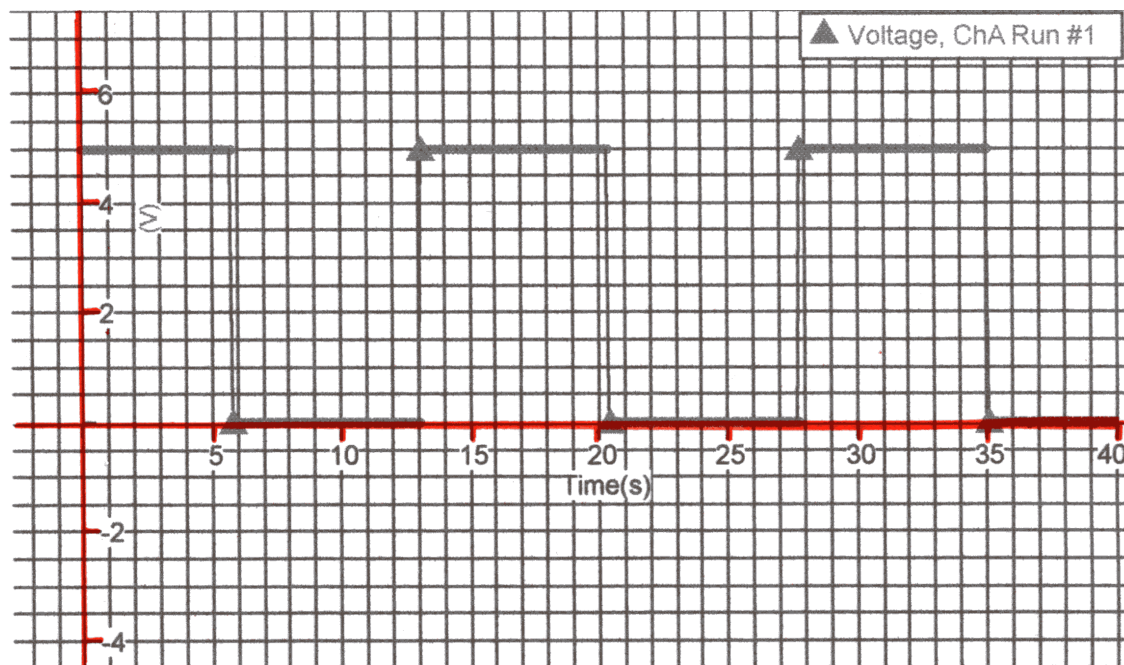


Fig. A)

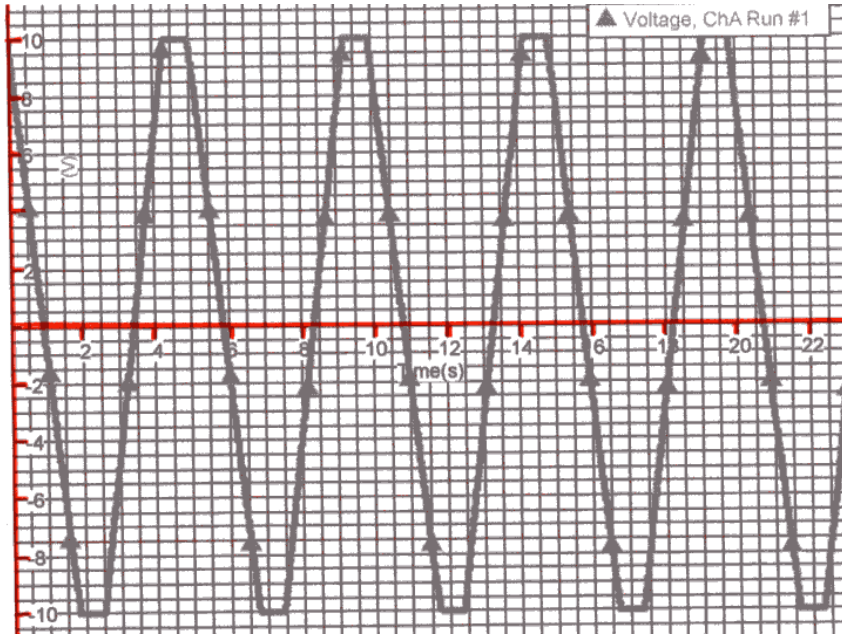


Fig. B)

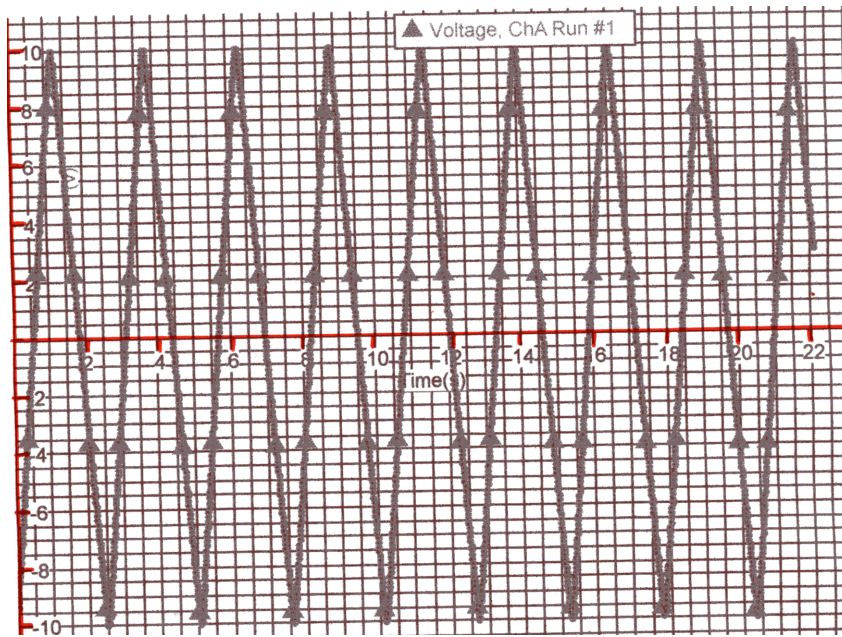


Fig. C)

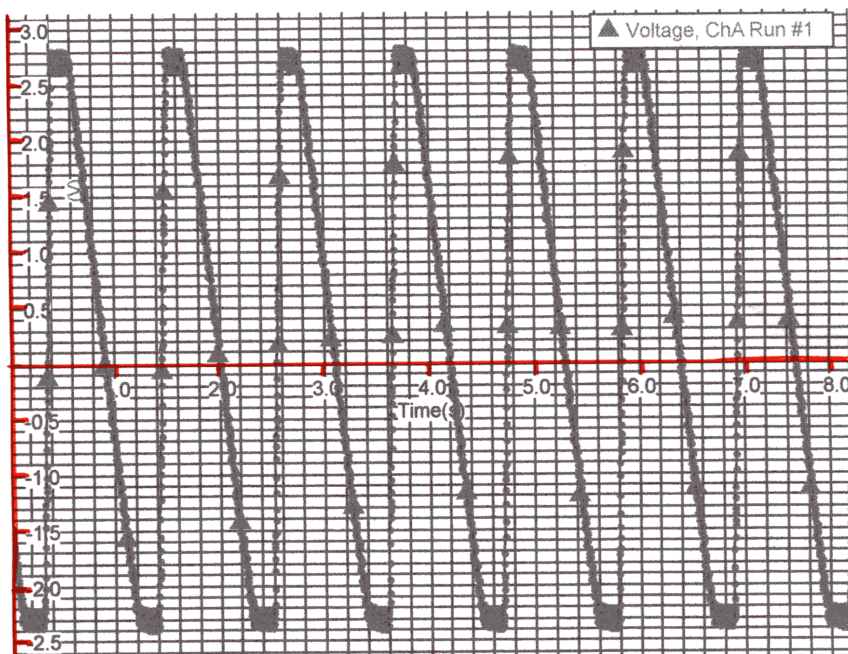


Fig. D)

Riferendoci a queste forme d'onda ottenute sperimentalmente, evidenziamo ora le principali categorie di forme d'onda:

1.3) ONDA IMPULSIVA (fig. A) e B)

Questo tipo di forma d'onda alterna, durante un periodo T , un livello positivo (con "livello" s'intende quel valore che la grandezza presenta costante durante un determinato intervallo di tempo) a un livello nullo.

Il livello positivo coincide con il valore di picco massimo del segnale e viene chiamato ampiezza dell'impulso, mentre la sua durata è detta larghezza dell'impulso e si indica con t_w .

Il suo andamento al variare del tempo sarà quindi del tipo di quello descritto dall'esempio della fig. 1.4).

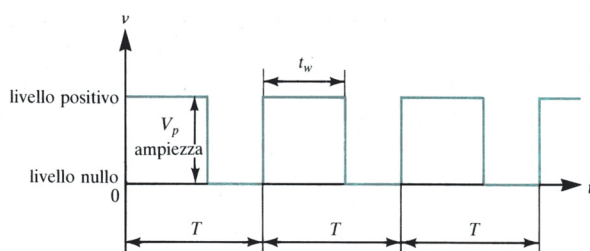


Fig. 1.4) Forma d'onda impulsiva ideale.

Questo esempio descrive in modo ideale l'andamento di una tensione v in funzione del tempo

Fig. 1.5) Si noti che un impulso si dice positivo se passa dal livello relativo all'asse di riferimento ad uno superiore, negativo se passa invece ad un livello inferiore.